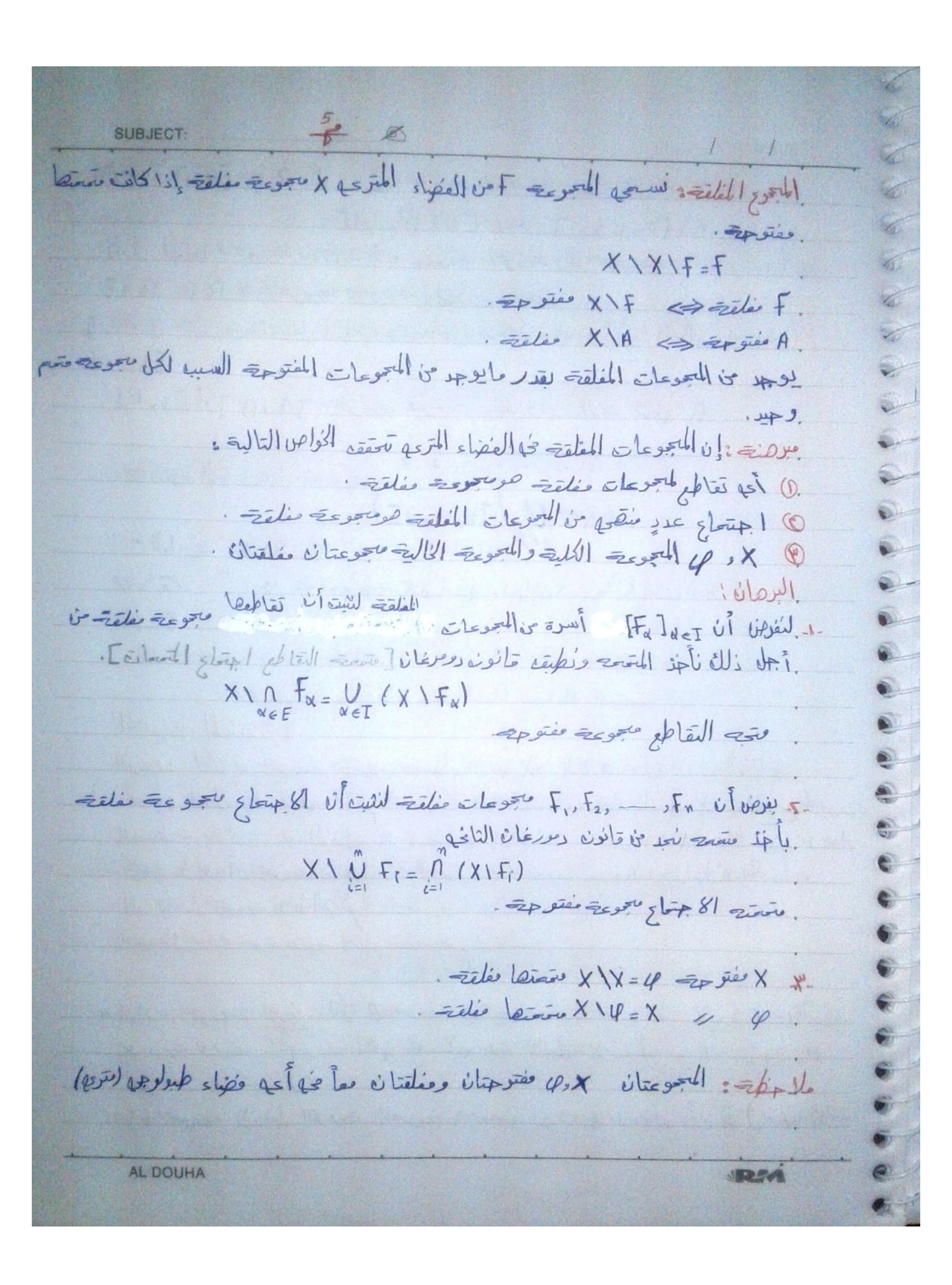


المجموعة المغلقة: نسمي المجموعة F من الفضاء المتري X مجموعة مغلقة إذا كانت متممتها مفتوحة.

$X \setminus X \setminus F = F$

F مغلقة $\Longleftrightarrow$ $X \setminus F$ مفتوحة.

A مفتوحة $\Longleftrightarrow$ $X \setminus A$ مغلقة.

يوجد من المجموعات المغلقة بقدر ما يوجد من المجموعات المفتوحة السبب لكل مجموعة متمم وحيد.

مبرهنة: إن المجموعات المغلقة في الفضاء المتري تحقق الخواص التالية:

① أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة.

② اجتماع عددٍ منتهي من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

③ X و φ المجموعة الكلية والمجموعة الخالية مجموعتان مغلقتان.

البرهان:

-1- لنفرض أن $[F_\alpha]_{\alpha \in I}$ أسرة من المجموعات [illegible] المغلقة لنثبت أن تقاطعها مجموعة مغلقة من أجل ذلك نأخذ المتمم ونطبق قانون دومورغان [متمم التقاطع اجتماع المتممات].

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in E} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$

متمم التقاطع مجموعة مفتوحة

-2- بفرض أن $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة لنثبت أن الاجتماع مجموعة مغلقة بأخذ متمم نجد من قانون دومورغان الثاني

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$$

متمم الاجتماع مجموعة مفتوحة.

-3- X مفتوحة $X \setminus X = \varphi$ متممتها مغلقة.

φ " $X \setminus \varphi = X$ متممتها مغلقة.

ملاحظة: المجموعتان X و φ مفتوحتان ومغلقتان معاً في أي فضاء طبولوجي (متري)

أمثلة: $[\alpha,\beta]$ في R مجموعة مغلقة لأن متممتها مجموعة مفتوحة.

$R\setminus[\alpha,\beta] =]-\infty,\alpha[\cup]\beta,+\infty[$

المجال المغلق مجموعة مغلقة لأن متممته مفتوحة وهو مجموعة غير مفتوحة لنأخذ

$]a,b[$ في R فهو مجموعة مفتوحة وليست مغلقة.

$]-\infty,a]$ مجموعة مغلقة لأن متممتها مجموعة مفتوحة وأيضاً المجال

$[b,+\infty[$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃

$[a,b[$ أو $]a,b]$ مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة. Z في R

-3 -2 -1 0 1 2 3

. Z مغلقة لأن متممتها مفتوحة

$$R\setminus Z = \bigcup_{n\in Z} \{]n,n+1[\}$$

. Q العادية $S = R\setminus Q$

. $Q^\circ = \varphi$ Q غير مفتوحة لا تساوي داخليتها.

. $S^\circ = \varphi$ غير مفتوحة.

. Q غير مفتوحة وغير مغلقة.

المجموعة المشتقة:

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري X و $x\in X$ نقطة من هذا الفضاء.

- نسمي النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A إذا كان أي جوار النقطة x يتقاطع مع المجموعة A بنقطة مختلفة عن النقطة x نفسها أي إذا كان $\mathcal{U}\cap A\setminus\{x\}\neq\varphi$ حيث $\mathcal{U}$ جوار كيفي لـ x أن مجموعة نقاط التراكم للمجموعة A تسمى مشتقة A ويرمز لها A' المجموعة المشتقة مجموعة نقاط التراكم.

بعض المؤلفين يسمون نقطة التراكم نقطة تجمع أو تقارب.

* لصاقة مجموعة: **تعريف:** لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري X ; $x\in X$ نسمي النقطة x نقطة لاصقة بالمجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A $\mathcal{U}\cap A\neq\varphi$ حيث $\mathcal{U}$ جوار كيفي لـ x.

إن مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A تسمى لصاقة A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ (بعض المؤلفين

SUBJECT:

تسمى $\bar{A}$ علاقة A).

مما سبق نلاحظ الآتي: [1] إذا كانت x تنتمي لـ A أي $(x \in A)$ فإن $x \in \bar{A}$ اللصاقة دائمًا وأبدًا تحوي المجموعة $A \subseteq \bar{A}$.

[2] إذا كانت $A \subseteq B$ فإن لصاقة B سوف تحوي لصاقة A ; $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

[3] كل نقطة تراكم هي نقطة لاصقة بمعنى أن $A' \subseteq \bar{A}$ اللصاقة تحوي المشتقة العكس غير صحيح.

أمثلة:

$A = [1,2[\cup \{3\} \cup \{4\}$

2 لاصقة بالمجموعة ولا تنتمي لها

$\bar{A} = [1,2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

3 و 4 ليس نقاط تراكم

وبالتالي $A' = [1,2]$

النقاط مثل النقطتين 3 و 4 في المثال السابق تسمى منعزلة.

- النقاط المنعزلة: نقاط اللاصقة لكنها ليست نقاط تراكم $\bar{A} \setminus A'$

مثال [2]: لنأخذ المجموعة $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

لصاقة $\mathbb{Z}$ على نقاط $\mathbb{Z}$ اللصاقة تحوي كل نقاط المجموعة

$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

أما المشتقة $\mathbb{Z}' = \varphi$ وداخليتها $\mathbb{Z}^\circ = \varphi$ نقاط داخلية ونقاط تراكم وفيها نقاط منعزلة.

- $\mathbb{Q}$ $x \in \mathbb{R}$ وأخذنا أي جوار كيفي لـ x الجوار بالتأكيد سيحوي مجالاً مفتوحًا.

أي مجال مفتوح يحوي ما لانهاية من الأعداد العادية

$\Rightarrow u \cap \mathbb{Q} \neq \varphi \Rightarrow x \in \bar{\mathbb{Q}} \Rightarrow \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

x نقطة لاصقة وبما أن x كيفية $\Leftarrow$ لصاقة $\mathbb{Q}$ هي كل $\mathbb{R}$.

$u \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \varphi$ $\quad$ $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

SUBJECT:

تعريف: تسمى المجموعة A من الفضاء المتري X مجموعة كثيفة إذا كانت لصاقتها تساوي الفضاء كله. أي إذا كان لصاقة A تساوي X.

مثال: مجموعة الأعداد العادية Q مجموعة كثيفة في R

ملاحظة: إذا كانت نقطة x لاصقة بالمجموعة A ولا تنتمي إليها تكون نقطة تراكم $x \in \bar{A}$ و $x \notin A$ عندها $x \in A'$.

كونها لاصقة $U \cap A = \varphi$ طالما x لا تنتمي لـ A ؛ $A = A \setminus \{x\}$ ؛ $U \cap A \setminus \{x\} \neq \varphi$

نتيجة: من أجل أي مجموعة جزئية A من الفضاء المتري وحتى الطبولوجي تتحقق العلاقة التالية:

الحل: $A \subseteq \bar{A}$ و $A' \subseteq A'$ $\Leftarrow$ $A \cup A' \subseteq \bar{A}$

من جهة ثانية نفرض $x \in \bar{A}$ هناك احتمالات **الأول** $x \in A$ ومنه $x \in A \cup A'$

الثاني: $x \notin A$ $\Leftarrow$ $x \in A'$ $\Leftarrow$ $x \in A \cup A'$

هذا يعني $\bar{A} \subseteq A \cup A'$